

Sistemas de comunicação baseados em caos com filtros adaptativos *kernel* e mapa quadrático

Eugênio G. Sabatini, Renato Candido, Magno T. M. Silva e Marcio Eisenkraft

Resumo— Filtros adaptativos baseados em *kernel* são utilizados para resolver problemas não lineares, como a equalização e decodificação de sistemas de comunicação baseados em caos (SCBCs). Essa aplicação foi investigada em trabalhos anteriores, porém, apenas com SCBCs que utilizam mapas bidimensionais como geradores de sinais caóticos (GSC), o que resulta em um maior custo computacional. Neste artigo é proposta a equalização e decodificação utilizando um mapa unidimensional como GSC e um filtro adaptativo baseado em *kernel* como equalizador e decodificador. Os resultados obtidos mostram que a utilização de mapas unidimensionais pode levar a um desempenho melhor em termos de taxa de erro de bit e a custo computacional menor que o caso de duas dimensões.

Palavras-Chave— Sinais caóticos, filtragem adaptativa baseada em núcleo, sistemas de comunicação.

Abstract— Kernel adaptive filters are used to solve nonlinear problems, such as the equalization and decoding of chaos-based communication systems (CBCS). This use was investigated in previous works. However, only with CBCS that use bidimensional maps as chaotic signal generators (CSG), which have higher computational cost. In this paper, it is proposed the equalization and decoding by using an unidimensional map as CSG and a kernel adaptive filter as equalizer and decoder. The results show that the use of an unidimensional map can lead to a lower bit error rate and computational cost, when compared to the two-dimensional case.

Keywords— Chaotic signals, kernel adaptive filtering, communication systems.

I. INTRODUÇÃO

Sistemas de comunicação baseados em caos (SCBCs) foram amplamente investigados na literatura, em especial, os que utilizam a sincronização de geradores de sinais caóticos (GSC) [1], [2], [3], [4]. No transmissor, esses sistemas combinam o sinal do GSC não linear com a mensagem por meio de uma função de codificação. No receptor, o GSC é combinado com a sincronização caótica e o uso da função de codificação inversa permite recuperar a mensagem transmitida.

Um dos maiores problemas dos SCBCs é a pouca robustez do sincronismo caótico em relação ao ruído e à interferência intersimbólica introduzidos pelo canal de comunicação. Um pequeno nível de ruído ou distorções simples podem ser suficientes para impedir a comunicação [5], [6], [7], [8]. A fim de reduzir o efeito do canal, esquemas de equalização aplicados a SCBCs foram propostos na literatura, utilizando-se diferentes abordagens de codificação da mensagem (veja, por exemplo, [5], [6], [9], [10], [11]). Dentre essas referências,

cabe destacar [6], que considera a equalização no domínio do tempo discreto para a modulação caótica que realimenta a sequência transmitida no GSC. No entanto, a recuperação da mensagem proposta em [6] depende do bom desempenho do equalizador, que por sua vez, utiliza o mapa caótico, pois o mesmo GSC do transmissor é utilizado no receptor.

Um outra abordagem, que usou filtros adaptativos baseados em núcleo (KAFs) no receptor de SCBCs para equalizar o canal e recuperar a mensagem transmitida, foi proposta em [12]. A capacidade de solucionar problemas não lineares foi verificada na equalização de canais em SCBCs que utilizam o mapa de Hénon [13] como GSC no transmissor. Verificou-se que o KAF é capaz de recuperar a mensagem transmitida sem nenhum conhecimento do mapa caótico e da função de codificação. Apesar dos resultados de [12] serem interessantes no que diz respeito à taxa de erro de bits, a solução baseada em KAF apresenta um custo computacional elevado, o que está diretamente ligado ao número de elementos do dicionário.

O alto custo computacional é o maior entrave para a aplicação desta solução em tempo real. Assim, com o objetivo de diminuir a cardinalidade do dicionário e conseqüentemente o custo computacional, várias técnicas de esparsificação foram propostas na literatura [14], [15]. Uma delas é a baseada no critério da novidade, que é empregado no algoritmo QKLMS (*quantized kernel least-mean-square*) [16]. Esse algoritmo foi utilizado em [12] em conjunto com a técnica de [14] para adaptar a largura do kernel gaussiano. Assim, para diminuir o custo computacional da solução de [12], pode-se considerar outras técnicas de esparsificação ou ainda utilizar o mesmo equalizador com outros mapas caóticos como GSCs e/ou funções de codificação.

Para diminuir o custo computacional e obter uma solução mais próxima da do sistema de comunicação convencional, propõe-se neste artigo utilizar no receptor o KAF de [12] para equalizar SCBCs que utilizam o mapa quadrático como GSC. Além disso, consideram-se outras funções de codificação. Para verificar se o sinal gerado é de fato caótico, calcula-se o expoente de Lyapunov [17] para cada função de codificação. A equalização obtida com o mapa quadrático aqui considerada é comparada com a que utiliza o mapa de Hénon de [12] em termos de custo computacional e taxa de erro de bits.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na seção II, apresenta-se a formulação do problema com a descrição do sistema de comunicação utilizado e da filtragem adaptativa baseada em núcleo. Na Seção III apresentam-se resultados de simulação e na Seção IV, as conclusões.

Eugênio G. Sabatini, Renato Candido, Magno T. M. Silva e Marcio Eisenkraft, Escola Politécnica da USP, São Paulo, SP, e-mails: {eugenio.sabatini, magno.silva, marcioft}@usp.br, renatocan@lps.usp.br. Este trabalho foi financiado pelo CNPq (119671/2019-0, 304715/2017-4, 311039/2019-7), FAPESP (2017/20378-9) e CAPES (código de financiamento 001).

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O SCBC que considera um KAF no receptor e o algoritmo QKLSM que incorpora o ajuste adaptativo da largura do kernel gaussiano são descritos nesta seção.

A. Sistema de comunicação utilizado

Neste artigo, utiliza-se o sistema de comunicação proposto em [18], adaptado para tempo discreto em [4] e modificado para substituir o GSC no receptor por um KAF em [12]. Na Figura 1, é apresentado o diagrama de blocos do sistema de comunicação utilizado, em que $m(n) \in \{-1; +1\}$ representa a mensagem, $\mathbf{x}(n) \subset \mathbb{R}^K$ é o vetor de estados utilizado na codificação da mensagem, $x_1(n)$ é a primeira componente de $\mathbf{x}(n)$ e $s(n)$ é o sinal transmitido. O receptor é composto por um KAF que tem o papel de mitigar o efeito do canal e ao mesmo tempo decodificar a mensagem. O sinal $r(n)$ é o sinal recebido, $y(n)$ é a saída do KAF e $m(n - \Delta)$ é o sinal desejado, conhecido no modo de treinamento do equalizador.

O GSC é modelado por

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)), \quad (1)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz $K \times K$ e \mathbf{b} é um vetor $K \times 1$. Como GSC utilizam-se um mapa quadrático [19], escrito na forma da Equação (1) com $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{b} = 1$ e $\mathbf{f}(s(n)) = -2s^2(n)$ e o mapa de Hénon [13], escrito na forma da Equação (1) com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(s(n)) = \begin{bmatrix} -1,4s^2(n) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mensagem é codificada por meio da função $c(\cdot, \cdot)$, ou seja,

$$s(n) = c(x_1(n), m(n)). \quad (2)$$

Neste artigo, utilizam-se as seguintes funções de codificação [20], [21]:

$$c^{(1)}(x_1, m) = \eta_1 x_1(n) + \eta_2 m(n) \quad \text{e} \quad (3)$$

$$c^{(2)}(x_1, m) = \eta_1 x_1(n) - \eta_2 [m(n) + 1] \text{sign}[\eta_1 x_1(n)], \quad (4)$$

em que $\text{sign}[\cdot]$ é a função sinal e η_1 e η_2 são constantes reais.

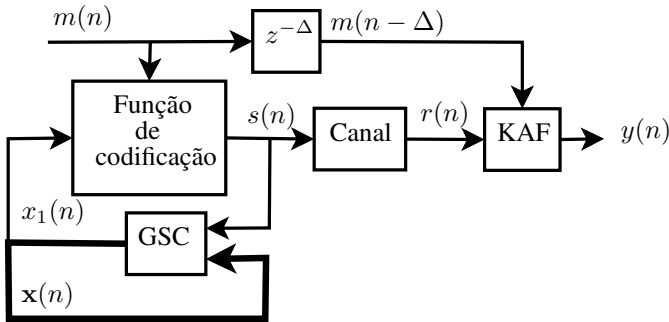


Fig. 1. Diagrama de blocos do sistema de comunicação utilizado.

B. Filtragem adaptativa baseada em núcleo

Filtros adaptativos *kernel* resolvem problemas não lineares ao projetar implicitamente o vetor de entrada em um espaço de dimensão mais elevada, onde esses problemas podem ser resolvidos linearmente [22]. Dentre os diferentes KAFs encontrados na literatura, o algoritmo KLMS (*kernel least-mean-squares*)

é o mais popular. Esse algoritmo mapeia o vetor de entrada $\mathbf{r}(n) = [r(n) \ r(n-1) \ \dots \ r(n-M+1)]^T \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^M$ num espaço \mathbb{F} de dimensão elevada como $\varphi(\mathbf{r}(n))$, em que $\varphi(\cdot)$ é uma função não linear relacionada a um *kernel* de Mercer e $[\cdot]^T$ representa a transposição. O *Kernel* de Mercer é uma função contínua, simétrica e positiva definida $\kappa : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que [22]

$$\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r})^T \varphi(\mathbf{r}'). \quad (5)$$

A Equação (5) é conhecida como truque do *kernel*, já que o produto interno dos vetores $\varphi(\mathbf{r})$ e $\varphi(\mathbf{r}')$ é calculado sem se conhecer explicitamente a função $\varphi(\cdot)$.

No espaço \mathbb{F} , o algoritmo LMS é utilizado para atualizar os pesos com a finalidade de estimar o sinal desejado $d(n) \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema da Representação e utilizando o truque do *kernel*, a saída do filtro pode ser escrita como [22], [12]

$$y(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu e(i) \kappa(\mathbf{r}(n), \mathbf{r}(i)), \quad (6)$$

em que μ é um passo de adaptação e $e(n) = d(n) - y(n)$ é o erro de estimação. Assim, definindo $a(n) \triangleq \mu e(n)$, as equações do KLMS são dadas por

$$a(1) = \mu d(1),$$

$$y(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu e(i) \kappa(\mathbf{r}(n), \mathbf{r}(i)),$$

$$e(n) = d(n) - y(n),$$

$$a(n) = \mu e(n).$$

Cabe observar que para se calcular a saída $y(n)$, o KLMS utiliza os vetores de entrada do filtro desde o instante inicial até o instante $n-1$. Esses vetores são guardados em um conjunto denominado dicionário e sua cardinalidade é $N_c(n) = n-1$.

A literatura contém diferentes funções que satisfazem (5). Entre essas funções, o *kernel* gaussiano é o mais utilizado e é definido como $\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp(-\zeta \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2)$, em que $\zeta = 1/(2\sigma^2)$ e $\sigma > 0$ é a largura do *kernel* [22]. Neste artigo, apenas o *kernel* gaussiano será utilizado.

O KLMS apresenta como principal desvantagem o elevado custo computacional e consumo de memória, que ocorrem devido ao crescimento linear do tamanho do dicionário. Assim, faz-se necessário o uso de técnicas de esparsificação de dicionário. Dentre inúmeras técnicas de esparsificação descritas na literatura, destaca-se o critério da novidade [14]. Para decidir se o vetor de entrada deve ser incluído no dicionário $\mathcal{C}(n)$, calcula-se

$$\text{dis}(\mathbf{r}(n), \mathcal{C}(n-1)) = \min_{1 \leq j \leq N_c(n-1)} \|\mathbf{r}(n) - \mathbf{r}(c_j)\|, \quad (7)$$

em que $\mathbf{r}(c_j)$ é o j -ésimo elemento do dicionário. Assim, se $\text{dis}(\mathbf{r}(n), \mathcal{C}(n-1))$ for menor ou igual a um limiar ϵ , o dicionário não se altera, pois considera-se que o vetor $\mathbf{r}(n)$ não carrega uma informação nova em relação aos demais vetores contidos no dicionário. Caso contrário, o vetor $\mathbf{r}(n)$ é incluído no dicionário, $N_c(n) = N_c(n-1) + 1$ e $a(n)$ é guardado na memória.

Em [16], o critério da novidade foi incorporado ao KLMS, levando ao algoritmo QKLSM. Nesse algoritmo, quando o

vetor de entrada $\mathbf{r}(n)$ não é incluído no dicionário pelo critério da novidade, o coeficiente $a(j^*)$ relativo ao vetor do dicionário mais próximo de $\mathbf{r}(n)$ é adaptado como $a(j^*) = a(j^*) + \mu e(n)$. O uso de dados redundantes para adaptar $a(j^*)$ leva a um algoritmo com melhor acurácia e um dicionário mais compacto quando essa adaptação não é realizada.

Em [12], o ajuste adaptativo da largura do *kernel* gaussiano proposto em [23] foi incorporado ao QKLMS. Esse ajuste consiste na adaptação de ζ por meio do método do gradiente estocástico seguindo a equação [23]

$$\zeta(n) = \zeta(n-1) \exp \left(-\mu_\zeta \zeta(n-1) \frac{\partial \hat{J}(n)}{\partial \zeta(n-1)} \right), \quad (8)$$

em que μ_ζ é um passo de adaptação, $\hat{J}(n) = e^2(n)$ é o erro quadrático instantâneo e

$$\frac{\partial \hat{J}(n)}{\partial \zeta(n-1)} = 2e(n) \sum_{j=1}^{N_c(n)} \{a_j(n-1) \|\mathbf{r}(n) - \mathbf{r}(c_j)\|^2 \times \exp(-\zeta(n-1) \|\mathbf{r}(n) - \mathbf{r}(c_j)\|^2)\}. \quad (9)$$

III. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, são apresentados resultados de simulação para comparar a solução de equalização de [12], que utiliza o mapa de Hénon como GSC, com uma solução que utiliza o mapa quadrático como GSC, considerando dois tipos diferentes de função de codificação. Inicialmente é feito um estudo sobre a escolha dos parâmetros e em seguida são mostrados os resultados numéricos.

A. Escolha dos parâmetros

Inicialmente se faz necessária a escolha dos parâmetros η_1 e η_2 das funções de codificação $c^{(1)}$ e $c^{(2)}$. Para isso foram calculados os expoentes de Lyapunov dos sinais transmitidos para os mapas quadrático e de Hénon em função de η_1 e η_2 , utilizando-se o método descrito em [17]. Assim, obtiveram-se os gráficos apresentados nas Figuras 2 a 5. Observa-se que nessas figuras há três regiões distintas. A região de cor cinza representa maior expoente de Lyapunov h negativo, ou seja, condições em que não há a ocorrência de dependência sensível às condições iniciais e conseqüentemente, não há comportamento caótico [17]. A região branca representa condições em que ocorre a divergência do transmissor e a região colorida representa condições em que h é positivo, o que indica a ocorrência de comportamento caótico [17].

Cabe observar que quando se utiliza o mapa quadrático e a função $c^{(1)}$, ocorre divergência para $\eta_1 + \eta_2 > 1$. Isso acontece porque nesse caso o módulo de $s(n)$ pode se tornar superior a 1, causando divergência em poucas iterações subsequentes. Na Figura 2b é apresentado para o mapa quadrático e $\eta_1 = 1 - \eta_2$.

No caso da codificação $c^{(1)}$, foram escolhidos $\eta_1 = 0,7$ e $\eta_2 = 0,3$ para o mapa de quadrático e $\eta_1 = 0,8$ e $\eta_2 = 0,15$ para o mapa de Hénon. Esses pontos estão indicados nas Figuras 2 e 3, respectivamente e correspondem aproximadamente ao mesmo valor do expoente de Lyapunov. Para a codificação $c^{(2)}$, foram escolhidos $\eta_1 = 0,9$ e $\eta_2 = 0,3$ para os dois mapas. Esses pontos estão indicados nas Figuras 4 e 5 e novamente correspondem aproximadamente ao mesmo maior expoente de Lyapunov.

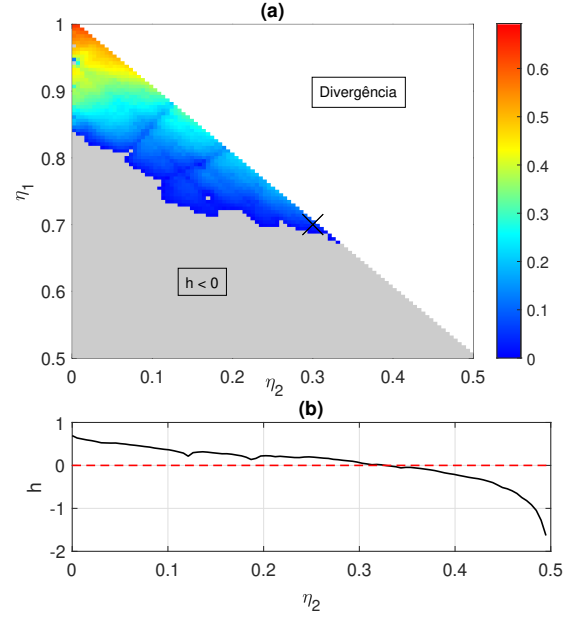


Fig. 2. (a) Maior expoente de Lyapunov h do sinal transmitido utilizando o mapa quadrático e a função $c^{(1)}$ e (b) h para o mapa quadrático e a função $c^{(1)}$ e $\eta_1 = 1 - \eta_2$.

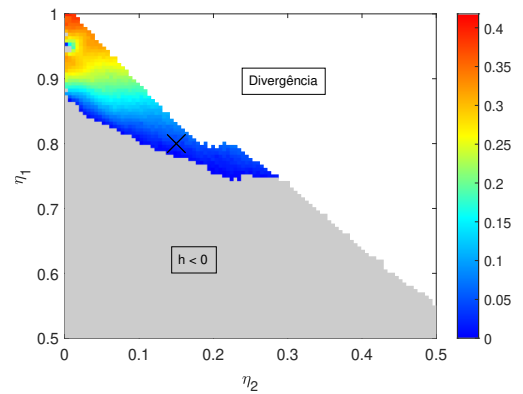


Fig. 3. Maior expoente de Lyapunov h do sinal transmitido utilizando o mapa de Hénon e a função $c^{(1)}$.

B. Simulações do SCBC

As simulações realizadas consideram a transmissão de uma mensagem binária $m(n) \in \{-1; +1\}$ com 10^6 amostras. A mensagem é codificada no transmissor utilizando o sistema descrito na Seção II e os mapas quadrático e de Hénon. Na comparação, também se considerou utilizando um sistema de comunicação convencional sem caos com um equalizador usando um KAF. Consideraram-se dois tipos de canal, um canal ideal e um com função de transferência

$$H(z) = 0,25 + z^{-1} + 0,25z^{-2}, \quad (10)$$

e ruído branco aditivo gaussiano de modo que a relação sinal ruído (*signal-to-noise-ratio* - SNR) considerada foi de 20 dB.

Os resultados das simulações para a transmissão sem caos, para o mapa quadrático e para o mapa de Hénon estão apresentados na Tabela I. Observa-se que o uso do SCBC faz com que o número de elementos necessários no dicionário do KAF seja maior. Isso ocorre, pois o GSC pode ser interpretado como um canal não linear com entrada $m(n)$ e saída $s(n)$.

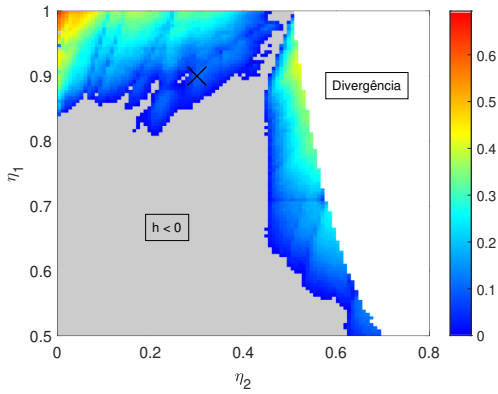


Fig. 4. Maior expoente de Lyapunov h do sinal transmitido utilizando o mapa quadrático e a função $c^{(2)}$.

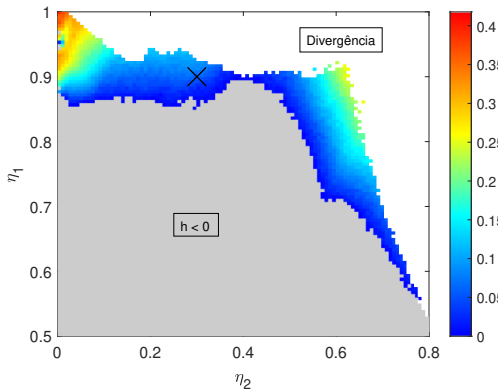


Fig. 5. Maior expoente de Lyapunov h do sinal transmitido utilizando o mapa de Hénon e a função $c^{(2)}$.

Porém, para o canal ideal os resultados em relação à BER são semelhantes ao caso convencional. Para os sistemas que utilizam sinais caóticos, a utilização do mapa quadrático como GSC apresentou resultados melhores em comparação à utilização do mapa de Hénon, para ambas as funções de codificação.

TABELA I

TAXA DE ERRO DE BIT E CARDINALIDADE DO DICIONÁRIO DO KAF ($M = 5$, $\Delta = 1$, $\mu = 0,5$, $\epsilon = 0,1$, $\zeta(1) = 50$ e $\mu_\zeta = 0,01$) EM FUNÇÃO DO MAPA, FUNÇÃO DE CODIFICAÇÃO E CANAL.

Mapa	Cod.	Canal ideal		Canal linear	
		BER	N_c	BER	N_c
Quad.	$c^{(1)}$	$< 10^{-6}$	1076	$1,1 \times 10^{-6}$	4586
	$c^{(2)}$	$< 10^{-6}$	912	$1,3 \times 10^{-5}$	2846
Hénon	$c^{(1)}$	$< 10^{-6}$	3668	0,015	5649
	$c^{(2)}$	$1,3 \times 10^{-6}$	6587	$1,4 \times 10^{-5}$	13818
Sem caos		$< 10^{-6}$	36	$< 10^{-6}$	134

Analisando as funções de codificação utilizadas com o mapa quadrático, pode-se perceber que $c^{(1)}$ levou a um maior número de elementos no dicionário e BER 10 vezes menor do que utilizando $c^{(2)}$. Portanto, considera-se que para o mapa quadrático a função de codificação $c^{(1)}$ é mais adequada.

Para o mapa de Hénon, a utilização da função de codificação $c^{(1)}$ resultou em menor número de elementos do dicionário. No entanto, para o canal linear, o valor da BER foi muito elevado. Assim, é mais viável utilizar a função de codificação $c^{(2)}$ e outra técnica de esparsificação de dicionário.

Nas Figuras 6 a 9 estão apresentados os sinais de saída do KAF, os erros na recuperação da mensagem, a evolução do número de elementos do dicionário e do número de multiplicações acumuladas do KLMS e o erro quadrático médio (MSE) para uma transmissão de 10^5 amostras utilizando o mapa quadrático com a função de codificação $c^{(1)}$ e mapa de Hénon com a função de codificação $c^{(2)}$. Nas Figuras 6 e 8 considera-se canal ideal sem ruído e nas Figuras 7 e 9 o canal linear (10) com $\text{SNR} = 20$ dB. Observa-se que assim que o KAF converge os erros se tornam cada vez mais esparsos e o número de elementos no dicionário se estabiliza. A transmissão utilizando o mapa quadrático apresentou quantidade de erros, número de elementos no dicionário, número de multiplicações acumuladas e MSE menores do que o mapa de Hénon. Portanto, considera-se que a transmissão com o mapa quadrático e a função de codificação $c^{(1)}$ apresenta melhor desempenho nessas medidas em relação ao que havia sido apresentado anteriormente na literatura [12].

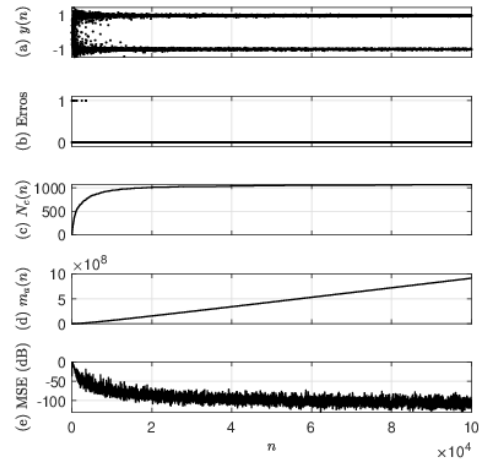


Fig. 6. Resultados da transmissão utilizando o mapa quadrático como GSC e a função de codificação $c^{(1)}$ em um canal ideal. (a) Saída do KAF ($M = 5$, $\Delta = 1$, $\mu = 0,5$, $\epsilon = 0,1$, $\zeta(1) = 50$ e $\mu_\zeta = 0,01$), (b) Erros de estimação, (c) Número de elementos do dicionário, (d) Número de multiplicações acumuladas do algoritmo KLMS, (e) Erro quadrático médio (MSE) calculado para 20 realizações.

IV. CONCLUSÕES

Com os resultados obtidos, foi possível atestar que os SCBCs com KAFs no receptor são capazes de equalizar e decodificar o sinal transmitido quando este é codificado utilizando o mapa quadrático como GSC. O desempenho em termos de BER foi superior aos obtidos anteriormente com o mapa de Hénon como GSC. Apesar desses resultados interessantes a transmissão utilizando SCBCs ainda exige um alto número de elementos no dicionário. Assim, em trabalhos futuros serão estudadas e implementadas novas técnicas de redução de dicionário, baseadas principalmente na remoção de elementos proposta em [23] para possibilitar a aplicação dessa solução em tempo real. Outra possibilidade a ser investigada é a transmissão de mensagens M -árias utilizando SCBCs com um KAF no receptor e verificar a capacidade de implementação e funcionalidade desse sistema.

REFERÊNCIAS

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 821–824, feb 1990.

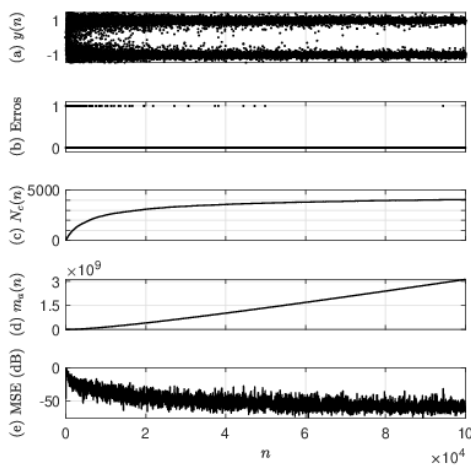


Fig. 7. Resultados da transmissão utilizando o mapa quadrático como GSC e a função de codificação $c^{(1)}$ em um canal linear com ruído. (a) Saída do KAF ($M = 5$, $\Delta = 1$, $\mu = 0,5$, $\epsilon = 0,1$, $\zeta(1) = 50$ e $\mu_\zeta = 0,01$), (b) Erros de estimação, (c) Número de elementos do dicionário, (d) Número de multiplicações acumuladas do algoritmo KLMS, (e) Erro quadrático médio (MSE) calculado para 20 realizações.

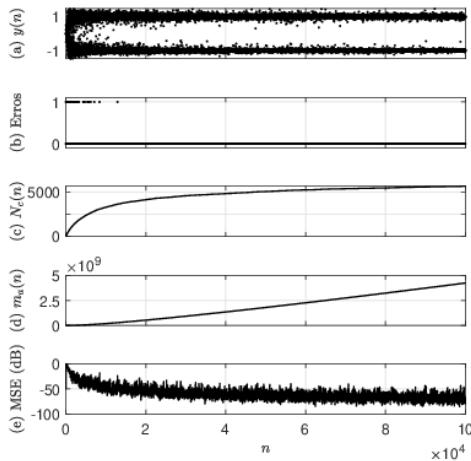


Fig. 8. Resultados da transmissão utilizando o mapa de Hénon como GSC e a função de codificação $c^{(2)}$ em um canal ideal. (a) Saída do KAF ($M = 5$, $\Delta = 1$, $\mu = 0,5$, $\epsilon = 0,1$, $\zeta(1) = 50$ e $\mu_\zeta = 0,01$), (b) Erros de estimação, (c) Número de elementos do dicionário, (d) Número de multiplicações acumuladas do algoritmo KLMS, (e) Erro quadrático médio (MSE) calculado para 20 realizações.

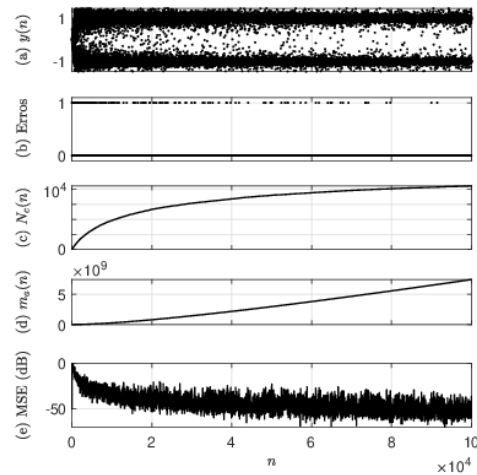


Fig. 9. Resultados da transmissão utilizando o mapa de Hénon como GSC e a função de codificação $c^{(2)}$ em um canal linear com ruído. (a) Saída do KAF ($M = 5$, $\Delta = 1$, $\mu = 0,5$, $\epsilon = 0,1$, $\zeta(1) = 50$ e $\mu_\zeta = 0,01$), (b) Erros de estimação, (c) Número de elementos do dicionário, (d) Número de multiplicações acumuladas do algoritmo KLMS, (e) Erro quadrático médio (MSE) calculado para 20 realizações.

- [2] M. Feki, B. Robert, G. Gelle, and M. Colas, "Secure digital communication using discrete-time chaos synchronization," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 18, pp. 881–890, nov 2003.
- [3] A. Argyris, D. Syvidis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore, "Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links," *Nature*, vol. 438, pp. 343–346, nov 2005.
- [4] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. A. Baccala, "Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, pp. 1–12, 2009.
- [5] R. Candido, *A questão da equalização em sistemas de comunicação que utilizam sinais caóticos*. PhD thesis, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo (Doutorado em Engenharia Elétrica), 2014.
- [6] R. Candido, M. Eisencraft, and M. T. M. Silva, "Channel equalization for synchronization of chaotic maps," *Digital Signal Processing*, vol. 33, pp. 42–49, oct 2014.
- [7] C. Williams, "Chaotic communications over radio channels," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and*

- Applications*, vol. 48, pp. 1394–1404, dec 2001.
- [8] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. H. A. Monteiro, "Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels," *IEEE Comm. Letters*, vol. 15, pp. 671–673, jun 2011.
- [9] J. Feng, C. K. Tse, and F. C. M. Lau, "Reconstruction of chaotic signals with application to channel equalization in chaos-based communication systems," *International Journal of Communication Systems*, vol. 17, pp. 217–232, apr 2004.
- [10] M. Ciftci and D. B. Williams, "Iterative equalization for chaotic communications systems," in *Proc. IEEE ICASSP, Philadelphia, EUA, 2005.*, vol. 4, pp. iv/165–iv/168 Vol. 4, 2005.
- [11] C. Vural and G. Çetinel, "Blind equalization of single-input single-output FIR channels for chaotic communication systems," *Digital Signal Processing*, vol. 20, pp. 201–211, jan 2010.
- [12] R. Candido, M. Eisencraft, and M. Silva, "Equalization in chaos-based communication systems using kernel adaptive filtering," *Journal of Comm. and Information Systems*, vol. 34, no. 1, pp. 55–63, 2019.
- [13] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 94–102, 1976.
- [14] J. Platt, "A resource-allocating network for function interpolation," *Neural Computation*, vol. 3, no. 2, pp. 213–225, 1991.
- [15] C. Richard, J. C. M. Bermudez, and P. Honeine, "Online prediction of time series data with kernels," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 3, pp. 1058–1067, 2009.
- [16] B. Chen, S. Zhao, P. Zhu, and J. C. Principe, "Quantized kernel least mean square algorithm," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 23, no. 1, pp. 22–32, 2012.
- [17] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences, Springer New York, 2000.
- [18] C. W. Wu and L. O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 03, pp. 1619–1627, dec 1993.
- [19] M. Eisencraft and L. A. Baccalá, "The Cramer-Rao bound for initial conditions estimation of chaotic orbits," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 38, pp. 132–139, oct 2008.
- [20] G. A. Abib and M. Eisencraft, "On the performance of a digital chaos-based communication system in noisy channels," in *Proc. IFAC MICNON, 2015, Saint Petersburg, Russia*, vol. 1, pp. 1–6.
- [21] R. Candido, M. T. M. Silva, and M. Eisencraft, "A new encoding and switching scheme for chaos-based communication," *Computational and Applied Mathematics*, vol. 37, pp. 253–266, oct 2017.
- [22] W. Liu, J. Principe, and S. Haykin, *Kernel Adaptive Filtering: A Comprehensive Introduction*. Wiley, NJ, 2010.
- [23] T. Wada and T. Tanaka, "Doubly adaptive kernel filtering," in *2017 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC)*, pp. 904–909, 2017.