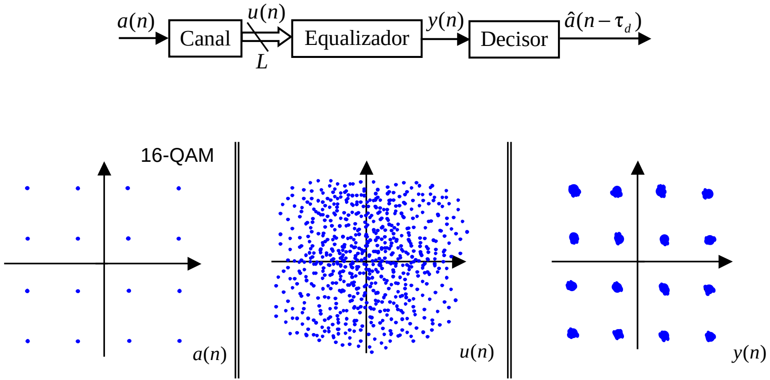
Uma combinação afim de dois equalizadores autodidatas adaptados com o CMA

Renato Candido, Magno T. M. Silva e Vitor H. Nascimento

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

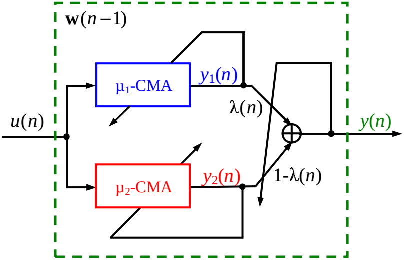
4 de setembro de 2008

O Problema da Equalização

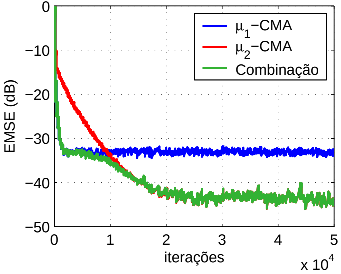


Combinação de Filtros Adaptativos

- Facilidade na escolha do passo de adaptação.



$\mu_1 > \mu_2$



$$y(n) = \lambda(n)y_1(n) + [1 - \lambda(n)]y_2(n)$$

Combinação Convexa

- O parâmetro de mistura $\lambda(n)$ está restrito ao intervalo $[0,1]$.
- A combinação é universal.
- Pode ser usada para melhorar a capacidade de *tracking*.
- Trabalhos:
  - J. Arenas-García, A. R. Figueiras-Vidal, e A. H. Sayed. *"Mean-square performance of a convex combination of two adaptive filters"*. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2006.
  - J. Arenas-García e A. R. Figueiras-Vidal. *"Improved blind equalization via adaptive combination of constant modulus algorithms"*. *Proc. of ICASSP'06*.

Combinação Afim

- Proposta em N. J. Bershad, J. C. M. Bermudez e J. Tourneret. *"An Affine Combination of Two LMS Adaptive Filters - Transient Mean-Square Analysis"*. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2008.
- É uma generalização da combinação convexa visto que $\lambda(n)$ não fica restrito ao intervalo $[0,1]$.
- $\lambda(n)$ pode assumir inclusive valores negativos, o que usualmente ocorre em regime no caso estacionário.

Adaptação de $\lambda(n)$

Método 1

Adaptar $\lambda(n)$ a fim de minimizar
$J_{\mathrm{CM}} \triangleq \mathrm{E}\{[r - y^2(n)]^2\}$, $r = \mathrm{E}\{a^4(n)\}/\mathrm{E}\{a^2(n)\}$.

$$\lambda(n+1) = \lambda(n) + \mu_\lambda e(n)[y_1(n) - y_2(n)], \quad e(n) = [r - y^2(n)]y(n)$$

Nem sempre garante o comportamento universal da combinação.

Método 2

Adaptar $\lambda(n)$ a fim de minimizar $J_{\mathrm{D}} \triangleq \mathrm{E}\{e_d^2(n)\}$ sendo
$e_d(n) = \hat{a}(n - \tau_d) - y(n)$ o erro de decisão.

$$\lambda(n+1) = \lambda(n) + \mu_\lambda e_d(n)[y_1(n) - y_2(n)]$$

Comportamento mais adequado que o método 1.

O parâmetro de mistura ótimo e o EMSE em regime

Definindo

$$e_{a,i}(n) = [\mathbf{w}_{\mathrm{o}}(n) - \mathbf{w}_i(n)]\mathbf{u}^T(n),$$

$$\text{EMSE}_i \text{ em regime: } \zeta_i = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{e_{a,i}^2(n)\} \text{ e}$$

$$\text{EMSE}_{12} \text{ em regime: } \zeta_{12} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{e_{a,1}(n)e_{a,2}(n)\}.$$

A partir da derivada de J_{CM}, obtém-se:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\lambda_{\mathrm{o}}(n)\} \approx \frac{\zeta_2 - \zeta_{12}}{\zeta_1 + \zeta_2 - 2\zeta_{12}}$$

$$\text{EMSE da combinação em regime: } \zeta \approx \zeta_2 - \frac{(\zeta_2 - \zeta_{12})^2}{\zeta_1 + \zeta_2 - 2\zeta_{12}}$$

Resultados Teóricos

Escolhendo um passo de adaptação μ_1 para o filtro 1 e considerando o passo de adaptação $\mu_2 \triangleq \delta\mu_1$ para o filtro 2, com $0 < \delta < 1 \Longrightarrow 0 < \mu_2 < \mu_1$.
Para o caso estacionário, nessas condições,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\lambda_o(n)\} \approx \frac{\delta}{(\delta - 1)} \text{ e}$$

$$\zeta \leq \zeta_2.$$

- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\lambda_o(n)\}$ é negativo no caso estacionário.

Se $\delta \to 1$ $(\mu_1 \approx \mu_2)$,

$$\zeta \approx \frac{\zeta_2}{2}.$$

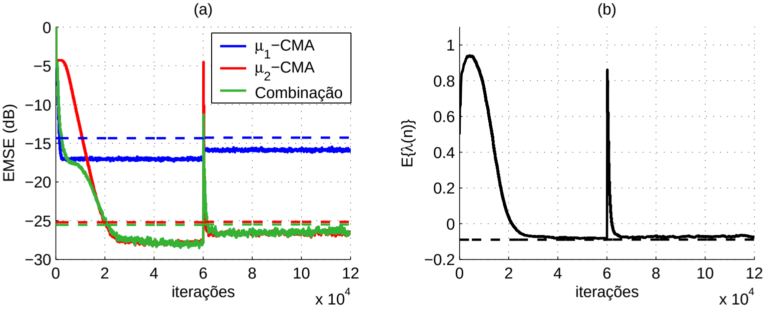
- O EMSE em regime da combinação é 3 dB menor que o dos filtros componentes quando $\delta \to 1$.

Cenário das Simulações

- Sinal com modulação 4-PAM.
- Canais $h_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 1{,}0 & -0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$ e $h_2 = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}64 & 0{,}80 & -0{,}55 \end{bmatrix}$.
- Filtros componentes:
  - $M = 4$ coeficientes.
  - Sobreamostragem por um fator $L = 2$.
  - Inicializado com um elemento não-nulo e unitário na segunda posição.

Simulação 1

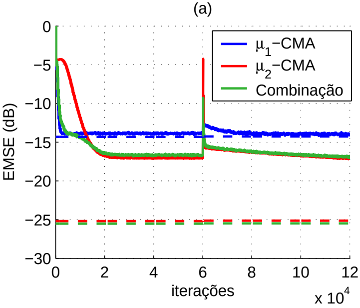
- $\mu_1 = 1 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 1 \times 10^{-4}$ $(\delta = 0{,}1)$ e $\mu_\lambda = 0{,}075$.
- Ambiente estacionário.

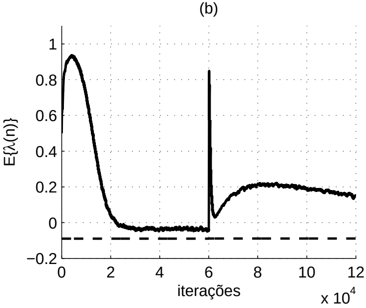


Resultados de Simulações

Simulação 2

- $\mu_1 = 1 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 1 \times 10^{-4}$ $(\delta = 0{,}1)$ e $\mu_\lambda = 0{,}075$.
- Ambiente estacionário.
- Relação sinal-ruído de 30dB.

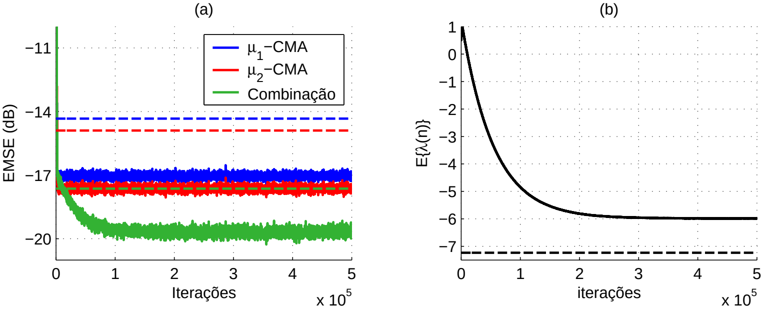




Resultados de Simulações

Simulação 3

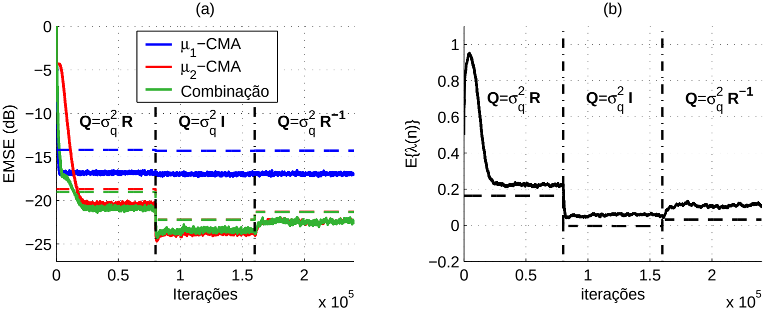
- $\mu_1 = 1 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 0{,}9 \times 10^{-3}$ $(\delta = 0{,}9)$ e $\mu_\lambda = 0{,}01$.
- Ambiente estacionário.



Resultados de Simulações

Simulação 4

- $\mu_1 = 1 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 1 \times 10^{-4}$ $(\delta = 0{,}1)$ e $\mu_\lambda = 0{,}075$.
- Ambiente não-estacionário: $\mathbf{w}_\mathrm{o}(n) = \mathbf{w}_\mathrm{o}(n-1) + \mathbf{q}(n)$, $\sigma_q^2 = 1 \times 10^{-6}$ e $\mathbf{Q} = \mathrm{E}\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\}$.



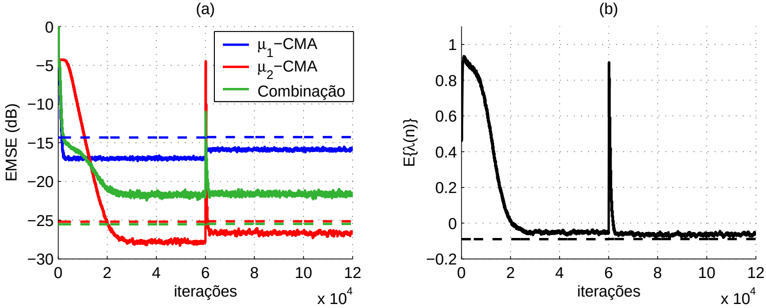
Conclusões

- O erro de decisão $e_d(n)$ é mais adequado para garantir a universalidade da combinação afim de 2 equalizadores CMA.
- O parâmetro de mistura $\lambda(n)$ é usualmente negativo em regime no caso estacionário.
- Quando são combinados dois filtros com passos de adaptação muito próximos ($\delta \to 1$), a combinação apresenta um EMSE 3dB menor que o EMSE dos filtros componentes.

Simulação adaptando $\lambda(n)$ pelo método 1

Simulação

- $\mu_1 = 1 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 1 \times 10^{-4}$ $(\delta = 0{,}1)$ e $\mu_\lambda = 0{,}01$.
- $\lambda(n)$ adaptado pelo método 1.
- Ambiente estacionário.



Modelo para o CMA

Random-walk model:

$$\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_o(n-1) + \mathbf{q}(n), \quad \mathbf{Q} = \mathrm{E}\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\}$$

Modelo de $e(n)$ para o CMA: $e(n) = \gamma(n)e_a(n) + \beta(n)$

ζ_i	$\frac{\mu_i \sigma_\beta^2 \mathrm{Tr}(\mathbf{R}) + \mu_i^{-1}\mathrm{Tr}(\mathbf{Q})}{2\bar{\gamma} - \mu_i \mathrm{Tr}(\mathbf{R})\xi}$
ζ_{12}	$\frac{\mu_1\mu_2\sigma_\beta^2 \mathrm{Tr}(\mathbf{R}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{Q})}{\bar{\gamma}(\mu_1+\mu_2) - \mu_1\mu_2 \mathrm{Tr}(\mathbf{R})\xi}$

$$\sigma_\beta^2 \triangleq \mathrm{E}\{\beta^2(n)\} = \mathrm{E}\{a^6(n) - r^2\, a^2(n)\}$$
$$\bar{\gamma} \triangleq \mathrm{E}\{\gamma(n)\} = 3\mathrm{E}\{a^2(n)\} - r$$
$$\xi \triangleq \mathrm{E}\{\gamma^2(n)\} = 3\, r\, \mathrm{E}\{a^2(n)\} + r^2$$

Comportamento de $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\lambda_o(n)\}$

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y(n) = d(n) - \lambda(n)y_1(n) - (1-\lambda(n))y_2(n) = \\ &= d(n) - \lambda(n)(d(n) - e_1(n)) - (1-\lambda(n))(d(n) - e_2(n)) = \\ &= \lambda(n)e_1(n) + (1-\lambda(n))e_2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_a(n) &= \lambda(n)e_{a,1}(n) + (1-\lambda(n))e_{a,2}(n) = \\ &= \lambda(n)\underbrace{(e_{a,1}(n) - e_{a,2}(n))}_{\text{pequeno quando } \delta \to 1} + e_{a,2}(n) \end{aligned}$$