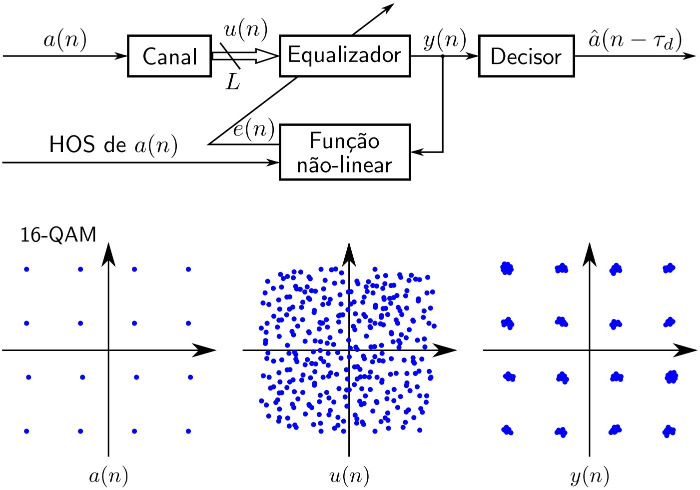
Análise estatística do algoritmo Shalvi-Weinstein

Renato Candido, Magno T. M. Silva, Vítor H. Nascimento e Maria D. Miranda

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

2 de outubro de 2009

O Problema da equalização



Algoritmo Shalvi-Weinstein (SWA)

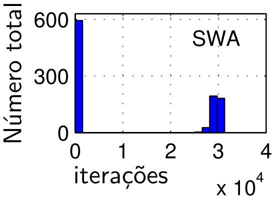
Adaptação do vetor de coeficientes

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \frac{e(n)}{\bar{\gamma}}\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\mathbf{u}(n)$$

$$e(n) = [r - y^2(n)]y(n)$$

$$r = \frac{\mathrm{E}\{a^4(n)\}}{\sigma_a^2} \quad \bar{\gamma} = 3\sigma_a^2 - r$$

Problema de divergência:



Histograma do número de divergências: $\mathbf{h}^T = [+0{,}1\ +1\ +0{,}1]$; 4-QAM; SNR$=$30dB; 64 bits; $M = 11$ coefs.; $\lambda = 0{,}999$; 10^3 realizações.

Como evitar a divergência ?

M. D. Miranda, M. T. M. Silva e V. H. Nascimento. *Avoiding divergence in the Shalvi-Weinstein algorithm*. IEEE Transactions on Signal Processing, Nov. 2008

1. Divergência devido à inconsistência na estimativa não-linear do sinal transmitido: $e(n) = [r - y^2(n)]y(n)$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \frac{e(n)}{\bar{\gamma}}\widehat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{u}(n)$$

$$\bar{e}(n) \triangleq \frac{e(n)}{\bar{\gamma}} = d(n) - y(n)$$

$$d(n) = x(n)y(n)$$

$$x(n) = \frac{3\sigma_a^2 - y^2(n)}{\bar{\gamma}}$$

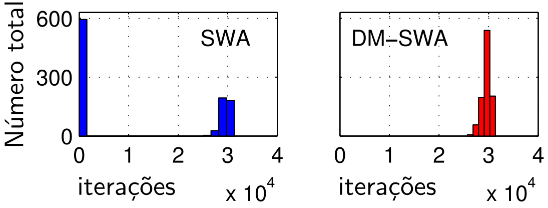
- $y(n)$ e $d(n)$ são interpretados como estimativas do sinal transmitido
- A consistência dessas estimativas é garantida se $y(n)$ e $d(n)$ tiverem o mesmo sinal $\Rightarrow x(n) > 0$

Como evitar a divergência ?

Dois modos de operação (DM-SWA)

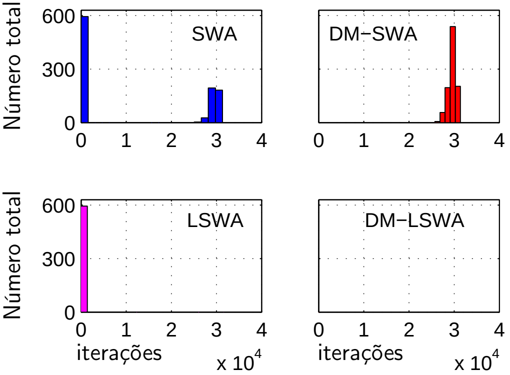
- Se as estimativas $y(n)$ e $d(n)$ forem consistentes $\Rightarrow x(n) > 0$
  - Algoritmo opera dentro da região de interesse (RI)
  - $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + [d(n) - y(n)]\widehat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{u}(n)$
- Se as estimativas $y(n)$ e $d(n)$ não forem consistentes $\Rightarrow x(n) < 0$
  - Algoritmo opera fora da RI
  - $d(n) \leftarrow 0$
  - $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) - y(n)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{u}(n)$

Histograma de divergências:



Como evitar a divergência ?

2. Divergência por causa da perda de positividade de $\widehat{\mathbf{R}}(n)$ devido à precisão numérica finita
   - Implementação em treliça (LSWA)



Histograma do número de divergências; $\mathbf{h}^T = [+0{,}1 \; +1 \; +0{,}1]$
4-QAM; SNR=30dB; 64 bits; $M = 11$ coefs.; $\lambda = 0{,}999$; 10^3 realizações.

Análise em regime

EMSE em regime

$$\zeta(\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{e_a^2(n)\}$$

$$e_a(n) = \mathbf{u}^T(n)\widetilde{\mathbf{w}}(n-1)$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{w}_\mathrm{o}(n) - \mathbf{w}(n)$$

Random-walk model

$$\mathbf{w}_\mathrm{o}(n) = \mathbf{w}_\mathrm{o}(n-1) + \mathbf{q}(n)$$

$$\mathbf{Q} = \mathrm{E}\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\}$$

- DM-SWA⇒Chaveamento entre os dois modos de operação
  - Análise considerando a operação dentro da RI ⇒ SWA
  - Análise de pior caso, considerando a operação apenas fora da RI

Análise em regime - dentro da RI

Análise do SWA baseada em:
E. Eleftheriou, D. D. Falconer. *Tracking properties and steady-state performance of RLS adaptive filter algorithms*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Out. 1986

Usando a teoria da independência: $\mathbf{u}(n)$ e $\widetilde{\mathbf{w}}(n-1)$ são independentes:

$$\zeta(\infty) \approx \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{||\widetilde{\mathbf{w}}(n-1)||^2_{\mathbf{R}}\}$$

Algumas hipóteses e aproximações

- A SNR é alta o suficiente para que $a(n-\tau_d) \approx \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}_o(n-1)$
- $u(n)$ gaussiano
- Em regime, $\mathrm{E}\{\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\} \approx (1-\lambda)\mathbf{R}^{-1}$

Análise em regime - dentro da RI

EMSE em regime:

$$\zeta(\infty) \approx \frac{\sigma_\beta^2 (1-\lambda) M \rho (\bar{\gamma})^{-2} + \mathrm{Tr}(\mathbf{QR})/(1-\lambda)}{1+\lambda-(1-\lambda)\rho\alpha M}$$

$$\rho = \left(1 + \frac{2[1-\lambda]}{1+\lambda}\right)$$

α, σ_β^2 e $\bar{\gamma}$, constantes que dependem de estatísticas de $a(n)$

Para $\lambda \lessapprox 1$,

$$\zeta(\infty) \approx \frac{\sigma_\beta^2 (1-\lambda) M (\bar{\gamma})^{-2} + \mathrm{Tr}(\mathbf{QR})/(1-\lambda)}{2},$$

que coincide com o resultado existente na literatura.

Análise em regime - fora da RI

A fim de simplificar os cálculos:

$$\zeta(\infty) \approx \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}(\mathbf{R}\mathbf{S}(n-1))$$
$$\mathbf{S}(n) \triangleq \mathrm{E}\{\widetilde{\mathbf{w}}(n)\widetilde{\mathbf{w}}^T(n)\}$$

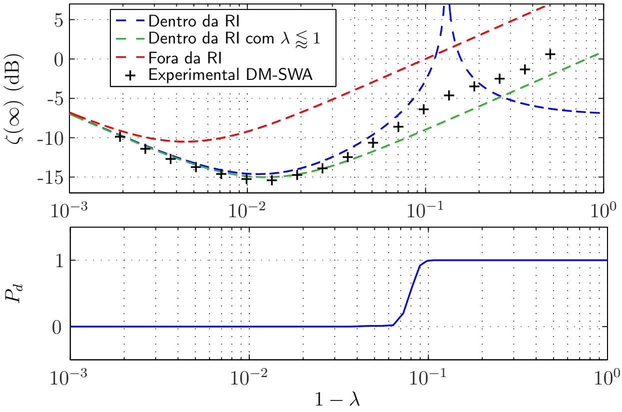
Fora da RI $\Rightarrow d(n) = 0$

Algumas aproximações

- Em regime, $\mathrm{E}\{\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\} \approx (1-\lambda)\mathbf{R}^{-1}$
- Desconsiderado o termo $\mathrm{E}\{\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)\widetilde{\mathbf{w}}(n-1)\widetilde{\mathbf{w}}^T(n-1)\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)\}$

$$\zeta(\infty) \approx \frac{\sigma_a^2(1-\lambda)M + \mathrm{Tr}(\mathbf{Q}\mathbf{R})/(1-\lambda)}{2}$$

Análise em regime - resultados de simulação



$$\mathbf{h}^T = [+0{,}1\ +0{,}3\ +1{,}0\ -0{,}1\ +0{,}5\ +0{,}2]$$

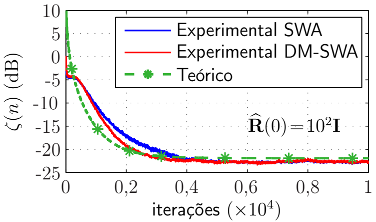
4-PAM; $M = 4$ coefs.; Sobreamostragem $L = 2$; $\widehat{\mathbf{R}}(0) = 10^2\mathbf{I}$; $\mathbf{Q} = 10^{-4}\mathbf{R}$

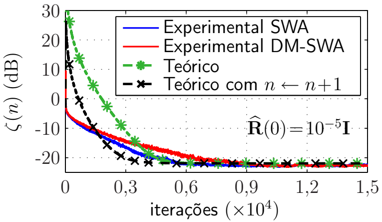
Análise de transitório

EMSE num instante n: $\zeta(n) = \mathrm{Tr}(\mathbf{RS}(n))$ $\quad \mathbf{S}(n) \triangleq \mathrm{E}\{\widetilde{\mathbf{w}}(n)\widetilde{\mathbf{w}}^T(n)\}$

Hipóteses

- Operação dentro da RI e caso estacionário ($\mathbf{q}(n) = \mathbf{0}$)
- $\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$ varia pouco
- Assume-se $\mathrm{E}\{\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(n)\} \approx [\mathrm{E}\{\widehat{\mathbf{R}}(n)\}]^{-1}$
- $u(n)$ gaussiano





$$\mathbf{h}^T = [+0{,}1\ +0{,}3\ +1{,}0\ -0{,}1\ +0{,}5\ +0{,}2]$$

6-PAM; $M = 4$ coefs.; Sobreamostragem $L = 2$; $\lambda = 0.999$; $\mathbf{Q} = 0$

Conclusões

- Resultado da análise em regime com maior precisão;
- Obtenção de um intervalo para escolha de λ;
- Obtenção de uma faixa de valores para o EMSE em regime obtido com o DM-SWA;
- Limitação do modelo de transitório do EMSE.